جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
چهاردهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۵

سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	مدت آزمون (دقیقه)
تعداد سوالات		
۲۵	-	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۲۵ سوال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- معادله‌ی $(\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}})^x + (\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}})^x = ۸$ دارای چند جواب است؟

الف) جواب ندارد. ب) یک جواب ج) دو جواب د) تعداد متناهی جواب هـ) تعداد نامتناهی جواب

۲- رقم راست عدد $۲۳^{۲۳} - ۱۷^{۱۷}$ برابر است با :

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ هـ) ۸

۳- در شکل زیر فرض کنید مساحت مربع بزرگ برابر ۱ باشد. هر رأس مربع را به وسط ضلع مقابلش وصل می‌کنیم. مساحت مربع کوچک چقدر است؟

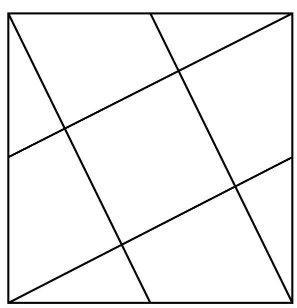
الف) $\frac{۱}{۴}$

ب) $\frac{۱}{۵}$

ج) $\frac{۱}{۶}$

د) $\frac{۱}{۷}$

هـ) $\frac{۱}{۸}$



۴- حداقل چند عضو از مجموعه‌ی $\{۲,۳,...,۱۳۷۵\}$ را حذف کنیم به‌طوری که مجموعه‌ی باقی‌مانده دارای این خاصیت باشد که حاصل ضرب هیچ‌یک از دو عضوش در خودش نباشد؟

الف) ۱۶ ب) ۳۶ ج) ۵۶ د) ۷۶ هـ) ۹۶

۵- فرض کنید مجموع $۱+۲+...+n$ یک عدد سه‌رقمی باشد که رقم‌های آن مساوی‌اند. در این‌صورت n بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ هـ) ۱۱

۶- فرض کنید در مثلث ABC، CH ارتفاع باشد و $AB \geq ۲CH$. در این‌صورت بزرگ‌ترین مقدار زاویه‌ی C برابر است با :

الف) ۳۰° ب) ۴۵° ج) ۶۰° د) ۹۰° هـ) ۱۲۰°

۷- تعدادی متناهی وزنه داریم که وزن هر یک حداکثر ۱۰ کیلوگرم است. می‌دانیم که اگر این وزنه‌ها را به دلخواه به دو دسته تقسیم کنیم مجموع وزن‌های یکی از دسته‌ها حداکثر ۱۰ کیلوگرم می‌شود. بیشترین وزن مجموع وزنه‌ها چند کیلوگرم می‌تواند باشد؟

الف) ۲۰ ب) ۲۵ ج) ۳۰ د) ۳۵ هـ) ۴۰

۸- فرض کنید هر حرف لاتین نماینده یک رقم باشد و اگر دو حرف لاتین متفاوت باشند حتماً رقم‌های آنها نیز متفاوت است. اگر داشته باشیم $\frac{۲}{۳}=\frac{SIX}{NINE}$ در این‌صورت مقدار I برابر است با:

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۹- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند به‌طوری‌که

$$(x+\sqrt{x^۲+۱})y+(\sqrt{y^۲+۱})=۱$$

در این‌صورت دقیق‌ترین نتیجه‌ای که می‌توان گرفت چیست؟

الف) $x=y=۰$ ب) $x+y=۰$ ج) $x+y\geq ۰$ د) $x+y\leq ۰$ هـ) x و y هم علامت‌اند

۱۰- اگر $a>۰$ و $b>۰$ و $۰<\alpha<۱$ در این‌صورت داریم:

الف) $a^a b^b \geq a^b b^a$ ب) $a^\alpha b^{۱-\alpha} < a+b$ ج) $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b+۱}{۴}}$

د) $(\alpha a+(۱-\alpha)b)^۲ \geq \alpha a^۲+(۱-\alpha)b^۲$ هـ) الف و ب و ج هر سه صحیح است.

۱۱- از نقطه O در درون مثلث ABC، عمودهای OM، ON و OP را به‌ترتیب بر اضلاع AB، BC و AC رسم می‌کنیم. اگر $AM=۳$، $MB=۵$، $BN=۴$، $NC=۲$ و $CP=۴$ در این‌صورت مقدار AP برابر است با:

الف) ۳ ب) $۲\sqrt{۲}$ ج) ۴ د) $۲\sqrt{۳}$ هـ) $۲\sqrt{۲}$

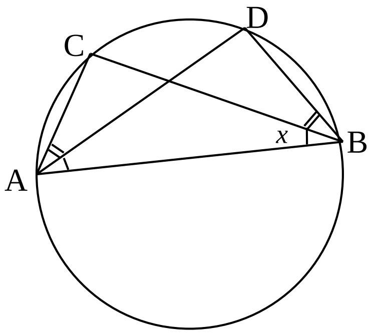
۱۲- نقاط A، B و C روی یک خط واقع‌اند و B نقطه‌ای میان A و C است. تمام دایره‌های گذرا از نقاط A و B را در نظر می‌گیریم و از C مماس‌هایی بر آنها رسم می‌کنیم. در این‌صورت مکان هندسی نقاط تماس برابر است با :

الف) یک خط راست ب) یک دایره ج) یک نیم‌دایره د) یک بیضی هـ) هیچ‌کدام

۱۳- معادله‌ی $۲^x+۱=۳^y$ در اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

الف) ۱ جواب ب) ۲ جواب ج) ۳ جواب د) ۴ جواب هـ) نامتناهی جواب

۱۴- مثلث ABC محاط در داخل دایره‌ی C را در نظر بگیرید. فرض کنید AD نیمساز زاویه A باشد. اگر $AB = \sqrt{2}BC = \sqrt{2}AD$، در اینصورت زوایای مثلث ABC برابرند با :



الف) ۱۵°، ۳۰°، ۱۳۵°
ب) ۳۰°، ۶۰°، ۹۰°
ج) ۴۵°، ۴۵°، ۹۰°
د) ۲۰°، ۴۰°، ۱۲۰°
هـ) ۱۵°، ۶۰°، ۱۰۵°

۱۵- فرض کنید a و b دو عدد طبیعی بوده به‌طوری‌که $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ عددی طبیعی باشد. در این‌صورت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b از کدام‌یک از اعداد زیر بزرگتر نیست (بهترین جواب ممکن مورد نظر است)؟

الف) $\sqrt{a+b}$
ب) $\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{a+b}}$
ج) $\sqrt{\frac{3(a^2+b^2)}{a+b}}$
د) $\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{2b}}{2}$
هـ) $\sqrt{a+b}-1$

۱۶- فرض کنید α و β دو عدد باشند به‌طوری‌که $\alpha^3-6\alpha^2+13\alpha=1$ و $\beta^3-6\beta^2+13\beta=19$. در این‌صورت مقدار $\alpha+\beta$ برابر کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۷

۱۷- عدد a را متعادل گوییم هرگاه بتوان رقم‌های آن را به دو دسته تقسیم کرد به‌طوری که مجموع رقم‌های دو دسته مساوی باشد. کوچکترین عدد a، به‌طوری‌که a و $a+1$ متعادل باشند در کدام‌یک از فاصله‌های زیر قرار می‌گیرند؟

الف) $[100, 200]$ ب) $[200, 300]$ ج) $[300, 400]$ د) $[400, 500]$ هـ) $[500, 600]$

۱۸- در مثلث ABC نقطه‌ی M را روی BC در نظر می‌گیریم و از M خطوطی موازی اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. فرض کنید مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل $\frac{5}{18}$ مساحت مثلث شود. در این‌صورت نقطه‌ی M ضلع BC را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

الف) ۱ به ۶ ب) ۱ به ۴ ج) ۱ به ۵ د) ۲ به ۹ هـ) ۱ به ۳

۱۹- یک کره به‌وسیله‌ی ۹ صفحه که از مرکز آن می‌گذرند تقسیم شده است. اگر هیچ سه‌صفحه‌ای در یک قطر مشترک نباشند کره به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

الف) 2^8 ب) 2^9 ج) ۷۶ د) ۸۱ هـ) ۷۴

۲۰- در مثلث قائم‌الزاویه $ABC(\angle A = 90^\circ)$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر شعاع دایره‌های محاطی مثلث‌های ABH و ACH به‌ترتیب برابر ۱ به ۳ باشند آنگاه شعاع دایره محاطی مثلث ABC برابر است با :

الف) ۵ ب) $\sqrt{10}$ ج) $2\sqrt{2}$ د) ۴/۵ هـ) ۳

۲۱- فرض کنید $f(x) = ax^2 + bx + c$، و به‌ازای $0 \leq x \leq 1$ داشته باشیم، $\left|f(x)\right| \leq 1$. در این‌صورت ماکزیمم مقدار $2a + b$ چه می‌تواند باشد؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ هـ) ۱۰

۲۲- مجموع تمام اعداد مثبت x را بیابید به‌طوری‌که عبارت $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{2+x}$ به‌ازای آنها عددی صحیح شود.

الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt[3]{4}$ ج) $\sqrt{5}$
د) $\sqrt{5}\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right)$ هـ) $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)}{\sqrt{3}}$

۲۳- حداقل چند نقطه باید در صفحه در نظر گرفت به‌طوری‌که هر نقطه صفحه لااقل از یکی از این نقاط فاصله‌اش گنگ باشد.

الف) ۲ نقطه ب) ۳ نقطه ج) ۴ نقطه
د) ۵ نقطه هـ) با تعدادی متناهی نقطه نمی‌توان این کار را انجام داد.

۲۴- فرض کنید $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. در این‌صورت مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید :

$$S = f\left(\frac{1}{14}\right) + f\left(\frac{2}{14}\right) + \ldots + f\left(\frac{13}{14}\right)$$

الف) ۷ ب) ۸/۵ ج) ۶/۵ د) ۴/۵ هـ) ۵/۵

۲۵- تعداد تمام اعداد بین ۱ تا ۱۰۰ را بیابید به‌طوری‌که مجموع اعدادی طبیعی باشند که در رقم‌های آنها هر یک از اعداد ۰ تا ۹ دقیقاً یک بار آمده باشد. (مثال: $9 + 8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 52 + 1 + 0 = 90$)

الف) ۷ ب) ۱۱ ج) ۱۵ د) ۱۹ هـ) ۲۳

پاسخ تشریحی

۱- گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید که $a=\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}}$. در این‌صورت روشن است که

$$\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}=\frac{\sqrt{(۴-\sqrt{۱۵})(۴+\sqrt{۱۵})}}{\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}}}=\frac{۱}{a}$$

پس صورت مسأله به معادله $a^x+a^{-x}=۸$ تبدیل می‌شود. بنابراین،

$$a^x-۸+a^{-x}=۰\Rightarrow (a^x)^۲-۸a^x+۱=۰\Rightarrow a^x=۴\pm\sqrt{۱۵}$$

که دارای جوابهای $x=۱$ و $x=-۱$ است.

راه حل دوم: از طرف دیگر، فرض کنید $a^{-x}+a^x=a^{-y}+a^y$. محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که $(a^x-a^y)(a^xa^y-۱)=۰$ پس یا $x=y$ و یا $x=-y$ پس معادله جواب دیگری ندارد.

۲- گزینه (الف) صحیح است.

باید باقیمانده تقسیم عدد $a=۲۳^{۲۳}-۱۷^{۱۷}$ را برابر ۱۰ پیدا کنیم. توجه کنید که $۲۳\overset{۱۰}{\equiv}۳$ و $۲۳^۲\overset{۱۰}{\equiv}-۱$. پس

$$۲۳^{۲۳}\overset{۱۰}{\equiv}(-۱)^{۱۱}\times ۳\overset{۱۰}{\equiv}-۳$$

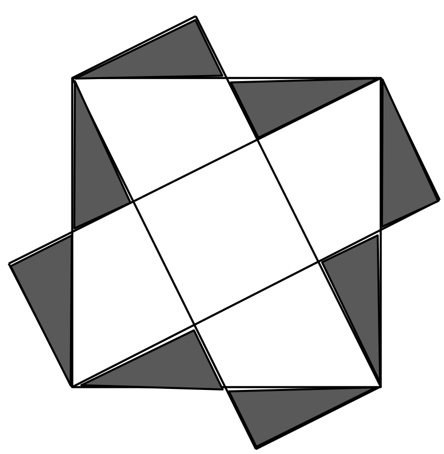
همچنین، $۱۷\overset{۱۰}{\equiv}-۳$ و $۱۷^۲\overset{۱۰}{\equiv}-۱$. پس

$$۱۷^{۱۷}\overset{۱۰}{\equiv}(-۱)^۸\times -۳\overset{۱۰}{\equiv}-۳$$

پس $a\overset{۱۰}{\equiv}-۳+۳\overset{۱۰}{\equiv}۰$ و بنابراین، رقم سمت راست a صفر است.

۳- گزینه (ب) صحیح است.

اگر به شکل زیر دقت کنید، خواهید دید که همه مثلث‌های قائم‌الزاویه نشان داده شده با هم برابرند.



همچنین اگر در مربع اصلی به جای مثلث‌های درونی مثلث‌های بیرونی را جایگزین کنیم به پنج مربع که هر یک با مربع کوچکتر همنهشت‌اند می‌رسیم. پس اگر مساحت مربع کوچک برابر S باشد، آنگاه $۵S = ۱$ و بنابراین $S = \frac{۱}{۵}$.

۴- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که اگر اعداد $۲,۳,\dots$ و ۳۷ را حذف کنیم، در مجموعه باقی‌مانده هیچ عضوی حاصل‌ضرب دو عضو دیگر نخواهد بود زیرا به‌ازای هر دو عضو مجموعه باقی‌مانده مانند a و b چون $a,b \geq ۳۸$ پس $ab \geq ۳۸^۲ > ۱۳۷۵$.
از طرف دیگر نشان می‌دهیم که گزینه (الف) نادرست است. ابتدا توجه کنید که اگر a عددی طبیعی باشد و $۲ \leq a \leq ۳۷$، آنگاه از بین a و $a^۲$ دست کم یکی باید حذف شود. حال اگر همه زوج‌های $(a, a^۲)$ را که $۲ \leq a \leq ۳۷$ و a مربع کامل نیست در نظر بگیریم، از هر زوج مرتب دست کم یک مؤلفه باید حذف شود و اعداد حذف‌شده دوبه‌دو متمایزند. چون تعداد اعدادی مانند a با خاصیت بالا برابر ۳۲ است، پس دست کم ۳۲ عضو باید حذف شوند.

۵- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

فرض کنید $S = ۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ برابر عدد $\overline{aaa} = ۱۱۱a$ شود. با توجه به این‌که $۱۱۱ = ۳ \times ۳۷$، پس $۳۷ \mid n(n+۱)$ و چون ۳۷ عددی اول است، n یا $n+۱$ باید بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد. اما چون $\frac{n(n+۱)}{۲} < ۱۰۰۰$ پس $n < ۵۰$ پس $n = ۳۶$ یا $n = ۳۷$ و یک بررسی ساده نشان می‌دهد که تنها $n = ۳۶$ قابل قبول است.

۶- ماخ گزینه (د) صحیح است.

ابتدا توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $(\angle C = ۹۰^\circ)$ ویژگی مورد نظر برقرار است. حال فرض کنید که ؟؟؟ . در این‌صورت

$$AB^۲ = c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C > a^۲ + b^۲ \geq ۲ab > ۲ab\sin C$$
$$= ۴S = \frac{۴AB.CH}{۲}$$

پس $۲CH < AB$ که خلاف فرض است.

۷- ماخ گزینه (ج) صحیح است.

ابتدا توجه کنید که انتخاب سه وزنه که وزن هر کدام ۱۰ کیلوگرم است، نشان می‌دهد که مجموع وزن وزنه‌ها می‌تواند برابر ۳۰ کیلوگرم باشد. ثابت می‌کنیم که این حداکثر ممکن است. فرض کنید $w_۱ \geq w_۲ \geq \cdots \geq w_n$ وزن وزنه‌ها را نشان دهد. k را کوچکترین عدد طبیعی بگیرید که $w_۱ + \cdots + w_k > ۱۰$. پس چون $w_۱ + \cdots + w_{k-۱} \leq ۱۰$ داریم،

$$۱۰ < w_۱ + \cdots + w_k \leq ۲۰$$

پس بنابر فرض مسأله $w_۱ + \cdots + w_n \leq ۱۰$ و در نتیجه،

$$w_۱ + \cdots + w_n \leq ۲۰ + ۱۰ = ۳۰$$

۸- گزینه (د) صحیح است.

فرض کنید $a=\overline{SIX}$ و $b=\overline{NINE}$. چون $\frac{۲}{۳}=\frac{a}{b}$ و همچنین می‌دانیم که $b<۲۰۰۰$ پس $N=۱$. پس $I\neq ۱$. حال بازه‌های $[۱۵۱۰,۱۵۱۹],\dots,[۱۳۱۰,۱۳۱۹],[۱۲۱۰,۱۲۱۹]$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به گزینه‌ها، b در یکی از این بازه‌ها قرار دارد. اگر مثلاً $۱۲۱۰\leq b\leq ۱۲۱۹$، آنگاه با توجه به $a=\frac{۲}{۳}b$ داریم $۸۰۶\leq a\leq ۸۱۲$ و چون هیچ‌یک از اعضای این بازه رقم دهگانشان ۲ نیست، پس از اینجا جوابی پیدا نمی‌شود. اگر $۱۳۱۰\leq b\leq ۱۳۱۹$، به‌طور مشابه جوابی پیدا نمی‌شود. اما اگر $۱۴۱۰\leq b\leq ۱۴۱۹$ نتیجه می‌شود که $۹۴۰\leq a\leq ۹۴۶$.

از اینجا مثلاً جواب‌های $b=۱۴۱۳, a=۹۴۲$ به‌دست می‌آید. پس $I=۴$.

۹- گزینه (د) صحیح است.

توجه کنید که رابطه داده شده معادل است با

$$x+\sqrt{۱+x^۲}=\frac{۱}{\sqrt{y^۲+۱}+y}=\sqrt{y^۲+۱}-y$$

پس،

$$\begin{aligned}
x+y&=\sqrt{y^۲+۱}-\sqrt{x^۲+۱}\\
(x+y)^۲&=y^۲+۱+x^۲+۱-\sqrt{(x^۲+۱)(y^۲+۱)}\\
\sqrt{(x^۲+۱)(y^۲+۱)}&=۱-xy\\
(x^۲+۱)(y^۲+۱)&=۱+x^۲y^۲-۲xy\\
x^۲y^۲+x^۲+y^۲+۱&=۱+x^۲y^۲-۲xy
\end{aligned}$$

در نتیجه، داریم $x^۲+y^۲+۲xy=۰$؛ یعنی $x+y=۰$. برعکس اگر $y=-x$، عبارت

$$(\sqrt{۱+x^۲})(y+\sqrt{۱+y^۲})$$

برابر

$$(\sqrt{۱+x^۲}+x)(\sqrt{۱-x^۲}-x)$$

خواهد بود که عبارت فوق نیز برابر ۱ است.

۱۰- این مسأله نادرست است.

ثابت می‌کنیم گزینه‌های (الف) و (ب) درست‌اند در حالی که گزینه (ج) نادرست است. توجه کنید که تابع $f_\alpha(x)=x^\alpha$ به‌ازای $x>۰$، بسته به اینکه α مثبت یا منفی باشد، تابعی صعودی یا نزولی است. پس اگر $a\geq b$، $f_{a-b}(x)$ صعودی است و در نتیجه،

$$\frac{a^ab^b}{b^aa^b}=f_{a-b}(\frac{a}{b})\geq f(۱)=۱$$

و اگر $a\leq b$، $f_{a-b}(x)$ نزولی است و در نتیجه،

$$\frac{a^a b^b}{b^a a^b} = f_{a-b}(\frac{a}{b}) \geq f(1) = 1$$

و در هر حال گزینه (الف) درست است. در گزینه (ب) فرض کنید $a \leq b$. در این‌صورت،

$$a^\alpha b^{1-\alpha} = f_\alpha(a) b^{1-\alpha} \leq f_\alpha(b) b^{1-\alpha} = b^\alpha b^{1-\alpha} = b < a + b$$

اگر $a \geq b$، باز هم با استدلال مشابهی می‌توانید نشان دهید که $a^\alpha b^{1-\alpha} > a + b$ و در هر حال، گزینه (ب) درست است.

اما گزینه (ج) نادرست است. فرض کنید $a = b$. در این‌صورت حکم این گزینه تبدیل می‌شود به

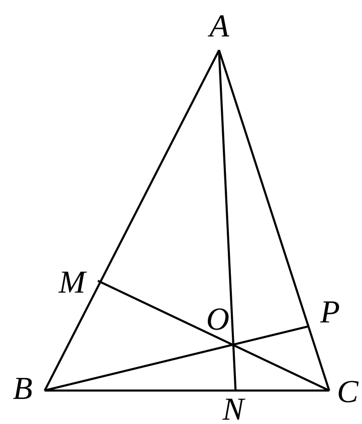
$$a^{2a} \geq (a^2)^{\frac{2a+1}{4}}$$

یا

$$a^{2a} \geq a^a a^{\frac{1}{2}}$$

که هم‌ارز است با $a^{2a} \geq a^{\frac{1}{2}}$. اما اگر $\frac{1}{2} < a < 1$ آنگاه، چون $a < 1$ و $a - \frac{1}{2} > 0$ نتیجه می‌شود $a^{a-\frac{1}{2}} < 1$ و بنابراین $a^a < a^{\frac{1}{2}}$.

۱۱- ماخ گزینه (د) صحیح است.



بنابر قضیه فیثاغورس،

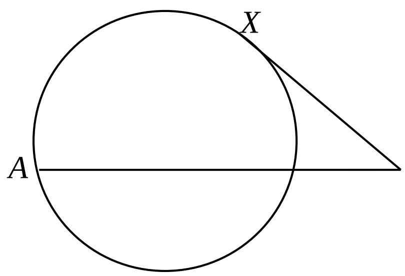
$$AM^2 + OM^2 = OA^2 = AP^2 + OP^2$$
$$CP^2 + OP^2 = OC^2 = CN^2 + ON^2$$
$$BN^2 + ON^2 = OB^2 = BM^2 + OM^2$$

اگر این سه رابطه را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$AM^2 + CP^2 + BN^2 = AP^2 + CN^2 + BM^2$$

اگر مقادیر داده شده را در رابطه بالا جایگذاری کنیم مقدار $AP = 2\sqrt{3}$ به‌دست می‌آید.

۱۲- ماخ گزینه (هـ) صحیح است.



اگر X نقطه تماس یکی از مماس‌ها با دایره باشد،

بنابر قضیه فیثاغورس قوت نقطه،

$$CX^۲ = CA.CB$$

پس CX مقداری ثابت است. بنابراین X روی یک دایره تغییر می‌کند. از طرف دیگر، اگر X نقطه‌ای باشد که $CX^۲ = CA.CB$ و X روی خط AB نباشد دایره‌ای از سه نقطه ؟؟؟، ؟؟؟ و ؟؟؟ می‌گذرد و خط ؟؟؟ بر این دایره مماس است. اما اگر ؟؟؟ روی خط ؟؟؟ باشد، به روشنی چنین دایره‌ای وجود ندارد پس مکان هندسی ؟؟؟ دایره‌ای است به مرکز ؟؟؟ و شعاع ؟؟؟ که دو نقطه تقاطع آن با خط ؟؟؟ حذف شده-اند.

۱۳- گزینه (ب) صحیح است.

روشن است که $(x,y) = (۳,۲)$ و $(x,y) = (۱,۱)$ جواب‌های مسأله‌اند. ادعا می‌کنیم که مسأله جواب دیگری ندارد. اگر $x \geq ۳$، آنگاه

$$۳^y = ۲^x + ۱ \overset{۸}{\equiv} ۱$$

پس y باید زوج باشد. در واقع اگر $y = ۲z + ۱$ آن‌گاه

$$۳^y = ۲^{۲z+۱} = ۹^z \times ۳ \overset{۸}{\equiv} ۳$$

پس فرض کنید $y = ۲z$. در نتیجه،

$$۲^x = ۳^{۲z} - ۱ = (۳^z - ۱)(۳^z + ۱)$$

پس $۳^z - ۱$ و $۳^z + ۱$ دو توان ۲ هستند که اختلاف آنها ۲ است. پس $۳^z = ۳$ و بنابراین، $z = ۱$. نتیجه می‌شود $(x,y) = (۳,۲)$.
پس تنها جواب‌های معادله $(x,y) - (۱,۱)$ و $(x,y) - (۳,۲)$ هستند.

۱۴- گزینه (الف) صحیح است.

قانون سینوس‌ها را در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle BDA} = \frac{\sin ۳x}{\sin ۲x}$$

پس بنابر فرض مسأله،

$$\frac{\sin ۳x}{\sin ۲x} = \sqrt{۲}$$

به آسانی نتیجه می‌شود که تنها جواب این معادله $x = ۱۵۰$ است.

۱۵- گزینه (الف) صحیح است.

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b را d فرض کنید. چون

$$\frac{a+۱}{b} + \frac{b+۱}{a} = \frac{a^۲ + b^۲ + a + b}{ab}$$

عددی طبیعی است، پس عبارت $a^۲ + b^۲ + a + b$ بر ab بخش‌پذیر است. پس $(a+b)^۲ + a + b$ نیز بر ab بخش‌پذیر است. یعنی ab عبارت $(a+b)(a+b+۱)$ را می‌شمارد. دقت کنید که چون ab بر $d^۲$ بخش‌پذیر است، پس

$$d^۲ \mid (a+b)(a+b+۱)$$

اما $a+b+1$ به‌صورت $dk+1$ است و بنابراین، نسبت به d اول است. پس $d^{2} \mid a+b$. یعنی $d^{2}\leq a+b$ که گزینه (الف) یعنی $d\leq\sqrt{a+b}$ را نتیجه می‌دهد. انتخاب $a=3$ و $b=6$ نشان می‌دهد که گزینه‌های (د) و (هـ) نادرست‌اند.
همچنین روشن است که به‌ازای هر $a,b\geq 0$،

$$\sqrt{a+b}\leq\sqrt{\frac{2(a^{2}+b^{2})}{a+b}}\leq\sqrt{\frac{3(a^{2}+b^{2})}{a+b}}$$

۱۶- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

اگر $\alpha=x+2$، آنگاه

$$\alpha^{3}-6\alpha^{2}+13\alpha=(x+2)^{3}-6(x+2)^{2}+13(x+2)=x^{3}+x+10$$

پس $x^{3}+x=-9$. همچنین اگر $\beta=y+2$، با محاسبه مشابهی نتیجه می‌شود $y^{3}+y=9$، اما می‌دانیم که تابع $f(t)=t^{3}+t$ تابعی اکیداً صعودی و فرد است. پس چون $f(x)=-f(y)$ نتیجه می‌شود $x+y=0$ و بنابراین،

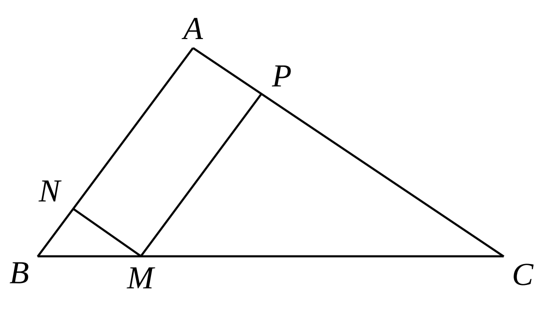
$$\alpha+\beta=x+y+4=4$$

۱۷- ماخ گزینه (هـ) صحیح است.

فرض کنید a عددی متعادل و سه رقمی باشد. (توجه کنید که هر عدد متعادل دو رقمی به‌صورت $a=\overline{xx}$ است و بنابراین $a+1$ متعادل نیست). مجموع رقم‌های هر عدد متعادل زوج است. پس برای اینکه $a+1$ هم متعادل باشد، رقم سمت a باید ۹ باشد. فرض کنید $a=\overline{xy9}$. روشن است که باید رابطه $x+y=9$ برقرار باشد. پس تنها عددهای متعادل سه رقمی ۱۸۹، ۲۷۹، ۳۶۹، ۴۵۹، ۵۴۹، ۶۳۹، ۷۴۹، ۸۴۹ و ۹۰۹ هستند. اما اگر a یکی از چهار عدد ۱۸۹، ۲۷۹، ۳۶۹ یا ۴۵۹ باشد $a+1$ متعادل نیست. پس کوچکترین عدد متعادل مانند a که $a+1$ هم متعادل باشد ۵۴۹ است.

۱۸- ماخ گزینه (د) صحیح است.

فرض کنید $\frac{BM}{BC}=x$. در این‌صورت، $\frac{CM}{BC}=1-x$. مساحت شکل Δ را با $\left[\Delta\right]$ نشان می‌دهیم.



فرض کنید خط‌های رسم شده از M ضلع‌های AB و AC را به‌ترتیب در N و P قطع کنند. در این‌صورت،

$$\left[BMN\right]=x^{2}\left[ABC\right]$$
$$\left[CMP\right]=(1-x)^{2}\left[ABC\right]$$

بنابراین

$$(x^{۲}+(۱-x)^{۲})\left[ABC\right]=(\left[BMN\right]+\left[CMP\right])$$
$$=(۱-\frac{۵}{۱۸})\left[ABC\right]$$

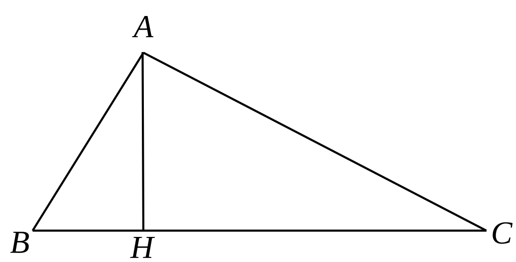
نتیجه می‌شود $۲x^{۲}-۲x+\frac{۵}{۱۸}=۰$. جواب‌های این معادله $x=\frac{۱}{۶}$ و $x=\frac{۵}{۶}$ هستند. پس M ضلع BC را به نسبت ۱ به ۵ تقسیم می‌کند.

۱۹- گزینه (هـ) صحیح است.

فرض کنید که a_n تعداد ناحیه‌هایی را نشان دهد که توسط n صفحه که هیچ سه‌تایی از آنها در یک قطر کره مشترک نیستند، در کره به‌وجود می‌آید. روشن است که $a_{۱}=۲$ و $a_{۲}=۴$. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $n, a_{n+۱}=a_n+۲n$. فرض کنید که صفحه‌های $\pi_{۱},\pi_{۲},\dots$ و π_n کره را به a_n ناحیه قسمت کرده باشند. اشتراک صفحه $\pi_{n+۱}$ با هر یک از این صفحه‌ها یک خط است که قطری از کره را در بر دارد. و بنابر فرض مسأله، این n خط که آنها را $l_{۱},l_{۲},\dots$ و l_n می‌نامیم دوبه‌دو متمایزند. روشن است که به‌ازای هر یک از این خط‌ها دو ناحیه جدید به‌وجود می‌آید. پس $۲n$ ناحیه جدید افزوده می‌شوند و بنابراین، $a_{n+۱}=a_n+۲n$. اکنون به استقرار روی n می‌توان ثابت کرد که $a_n=n^{۲}-n+۲$. پس $a_{۹}=۷۴$.

۲۰- گزینه (ب) صحیح است.

اضلاع مثلث قائم‌الزاویه را با b,a و c نشان می‌دهیم.



روشن است که مثلث‌های ABH و ACH با مثلث ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها نیز به‌ترتیب برابر $\frac{c}{a}$ و $\frac{b}{a}$ است. پس اگر شعاع دایره‌های محاطی آنها را به‌ترتیب با $r_{۱}$ و $r_{۲}$ نشان دهیم، آنگاه

$$r_{۱}=\frac{c}{a}r,\quad r_{۲}=\frac{b}{a}r$$

پس،

$$r_{۱}^{۲}+r_{۲}^{۲}=\frac{b^{۲}+c^{۲}}{a^{۲}}r^{۲}=r^{۲}$$

در نتیجه، $r=\sqrt{r_{۱}^{۲}+r_{۲}^{۲}}$ یا $r=\sqrt{۱۰}$.

۲۱- گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید که

$$\begin{aligned}
&| f(۰) |=| c |\le ۱\\
&| f(\frac{۱}{۲}) |=| \frac{a}{۴}+\frac{a}{۲}+c |\le ۱\\
&| f(۱) |=| a+b+c |\le ۱
\end{aligned}$$

پس،

$$\begin{aligned}
| c-۴(\frac{a}{۴}&+\frac{a}{۲}+c)+۳(a+b+c) |\\
&=| f(۰)-۴f(\frac{۱}{۲})+۳f(۱) |\\
&\le| f(۰)+۴f(\frac{۱}{۲})+۳f(۱) |\\
&\le ۸
\end{aligned}$$

اما

$$| c-۴(\frac{a}{۴}+\frac{b}{۲}+c)+۳(a+b+c) |=| ۲a+b |$$

پس $\left|۲a+b\right|<۸$. پس ۸ کران بالایی برای $\left|۲a+b\right|$ است و مثال

$$f(x)=۸x^۲-۸x+۱$$

نشان می‌دهد که ۸ ماکزیمم مقدار $۲a+b$ است.

۲۲- گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید $f(x)=\sqrt[۳]{۲+x}+\sqrt[۳]{۲-x}$. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، $f(x)\le ۲\sqrt[۳]{۲}$. برای اثبات کافی است ماکزیمم f را پیدا کنیم. معادله $f'(x)=۰$ تبدیل می‌شود به،

$$\frac{۱}{۳}(۲+x)^{-\frac{۲}{۳}}-\frac{۱}{۳}(۲-x)^{-\frac{۲}{۳}}=۰$$

که دارای جواب $x=۰$ است و چون $f(۰)=۲\sqrt[۳]{۲}$ نتیجه می‌شود که ماکزیمم f مقدار $۲\sqrt[۳]{۲}$ است. اکنون چون $۲\sqrt[۳]{۲}<۳$، کافی است جواب معادله‌های

$$(۲+x)^{\frac{۱}{۳}}+(۲-x)^{\frac{۱}{۳}}=n$$

را به‌ازای $n=۱$ و $n=۲$ پیدا کنیم. اگر قرار دهیم $y^۳=x+۲$، نتیجه می‌شود $۲-x=۴-y^۳$ و بنابراین،

$$y+(۴-y^۳)^{\frac{۱}{۳}}=n$$

یا

$$\begin{aligned}
۴-y^۳&=(n-y)^۳\\
&=n^۳-۳n^۲y+۳ny^۲-y^۳
\end{aligned}$$

پس $3ny^2 - 3n^2y + n^3 - 4 = 0$. جواب‌های این معادله عبارت‌اند از

$$y = \frac{3n^2 \pm \sqrt{9n^2 - 12n(n^3-4)}}{6n}$$

است. به‌ازای $n = 1$، جواب مثبت معادله $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است و به‌ازای $n = 2$ معادله

$$x = y^3 - 2 = \sqrt{5}$$

دو جواب مثبت مانند y_1 و y_2 دارد به‌طوری‌که $y_1y_2 = \frac{2}{3}$ و $y_1 + y_2 = 2$. به آسانی می‌توان ثابت کرد که $y_1^3 + y_2^3 = 4$ و بنابراین $x_1 + x_2 = 0$.

۲۳- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

سه نقطه $P = (0,0), Q = (1,0)$ و $R = (\sqrt[4]{2}, 0)$ را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که هیچ نقطه‌ای در صفحه وجود ندارد که فاصله آن از هر سه نقطه P و Q و R عددی گویا باشد. فرض کنید $X = (x, y)$ چنین نقطه‌ای باشد. اگر

$$\begin{aligned} a &= x^2 + y^2, \\ b &= (x-1)^2 + y^2 \\ &= a + 1 - 2x, \\ c &= (x - \sqrt[4]{2})^2 + yh2 \\ &= a + \sqrt{2} - 2x\sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

آنگاه b, a و c باید اعدادی گویا باشد. پس $1 - 2x$ و $\sqrt{2} - 2x\sqrt[4]{2}$ اعدادی گویا هستند. از اینجا نتیجه می‌شود که x گویاست. اما در این‌صورت $\sqrt{2} - 2x\sqrt[4]{2}$ نمی‌تواند عددی گویا باشد. پس سه نقطه Q, P و R دارای خاصیت مورد نظر مسأله‌اند.
توجه کنید که هیچ دو نقطه‌ای مانند A و B نمی‌توانند منظور ما را برآورده کنند. فرض کنید R عددی گویا بزرگتر از نصف فاصله A و B باشد. در این‌صورت دایره‌های به شعاع R و به مرکزهای A و B یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. فاصله P از A و B گویاست.

۲۴- ماخ گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید که

$$f(1-x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{4}{4 + 2 \times 4^x} = \frac{2}{4^x + 2}$$

پس،

$$f(x) + f(1-x) = \frac{4^x + 2}{4^x + 2} = 1$$

بنابراین

$$۲S = \left[f(\frac{۱}{۱۴}) + f(\frac{۱۳}{۱۴})\right] + \cdots + \left[f(\frac{۱۳}{۱۴}) + f(\frac{۱}{۱۴})\right]$$

$$= \overbrace{۱ + \cdots + ۱}^{\text{۱۳ بار}}$$

$$= ۱۳$$

پس $S = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$.

۲۵- ماخ گزینه (الف) صحیح است.

توجه کنید که اگر a عددی با خاصیت مورد نظر مسأله باشد، a به پیمانه ۹ با عدد $۴۵ = ۹ + \cdots + ۱ + ۰$ همنهشت است. پس a بر ۹ بخش‌پذیر است. همچنین $۴۵ \leq a \leq ۹۹$. پس حداکثر ۷ مقدار برای a وجود دارد. به‌سادگی می‌توان دید که همه اعداد ۴۵، ۵۴، . . . و ۹۹ خاصیت مورد نظر را دارند. پس دقیقاً ۷ مقدار برای a وجود دارد.